Etap szkolny (10 stycznia 2018 r.)

Klasa I

1. Dane są liczby całkowite dodatnie $a < b < c < d < e$, które spełniają równania

$$a + b + c + d + e = 31 \qquad \text{oraz} \qquad 3a = e.$$

Wyznaczyć liczbę d.

2. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $\angle ACB = 90°$, poprowadzono wysokość CD. Liczby r, r_1 i r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ACD i BCD. Wykazać, że wtedy $r + r_1 + r_2 = |CD|$.

3. Dla pewnej liczby pierwszej $p > 3$ oraz liczby naturalnej n liczba p^n ma w zapisie dziesiętnym dokładnie 100 cyfr. Wykazać, że pewna cyfra powtarza się w tym rozwinięciu przynajmniej 11 razy.

4. Dany jest okrąg i dwie cięciwy: cięciwa AB o długości 10 cm oraz cięciwa AC – o długości 12 cm. Wyznaczyć promień okręgu, jeśli wiadomo, że cięciwa AC jest równoległa do stycznej do tego okręgu w punkcie B.

Organizator:

Kuratorium Oświaty
w Opolu

Patronat:

Instytut
Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Opolskiego

Etap szkolny (10 stycznia 2018 r.)

Klasa II

1. Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.

2. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $\angle ACB = 90^\circ$, poprowadzono wysokość CD. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt BCD, zaś Q jest punktem wspólnym prostych CS i AB. Udowodnić, że $|AQ| = |AC|$.

3. Udowodnić, że do dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c różnych od zera, wielomian szóstego stopnia

$$W(x) = \left(ax^2 + 2bx + c\right)\left(bx^2 + 2cx + a\right)\left(cx^2 + 2ax + b\right)$$

ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

4. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkty M i N są środkami boków odpowiednio AB i BC. Odcinek AN przecina przekątną BD w punkcie P. Wykazać, że $\angle AMD = \angle BMP$.

Organizator:

Kuratorium Oświaty w Opolu

Patronat:

Instytut Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Opolskiego

Etap szkolny (10 stycznia 2018 r.)

KLASA III

1. Dany jest ciąg liczb całkowitych $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, który spełnia trzy poniższe warunki:

$$\begin{cases} 1 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31 \\ 3x_1 = x_5 \end{cases}.$$

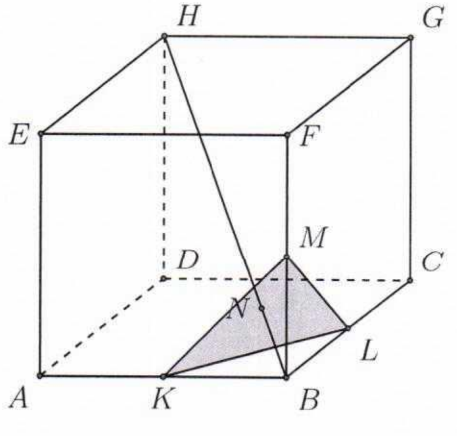
Wyznaczyć x_4.

2. Wiadomo, że $a = \log_6 15$ oraz $b = \log_{12} 18$. Pokazać, że wtedy

$$\log_{25} 24 = \frac{5-b}{2(ab + a - 2b + 1)}.$$

3. Udowodnić, że jeśli $3x^2 - 31x + 80 < 0$, to $\cos \frac{3}{6-x} < 0$.

4. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Przez środki krawędzi AB, BC i BF, oznaczone odpowiednio przez K, L i M, poprowadzono płaszczyznę, która przecina przekątną BH sześcianu w punkcie N (por. rysunek). Udowodnić, że $|HN| = 5|BN|$.



Organizator:

KURATORIUM OŚWIATY
W OPOLU

Patronat:

INSTYTUT
MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU OPOLSKIEGO