

Zawody wojewódzkie (10 marca 2018 r.)

KLASA I

1. Dany jest zbiór dziesięciu liczb naturalnych  $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ . Elementy tego zbioru spełniają warunek  $10 \leq a < b < c < d < e < f < g < h < i < j \leq 150$ . Wykazać, że dla pewnych dwóch liczb  $x, y \in M$  takich, że  $x < y$  zachodzi nierówność  $\frac{y}{x} \leq \frac{4}{3}$ .
2. W trójkącie prostokątnym  $ABC$ , w którym  $\angle ACB = 90^\circ$ , poprowadzono wysokość  $CD$ . Liczby  $r, r_1$  i  $r_2$  są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty  $ABC, ACD$  i  $BCD$ . Wykazać, że wtedy  $r_1^2 + r_2^2 = r^2$ .
3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb pierwszych  $p$  i  $q$ , dla których suma  $p^4 + q^4$  jest podzielna przez 50.
4. Promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ma długość 25 cm, zaś promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 12 cm. Obliczyć długości boków tego trójkąta.

**Powodzenia!**

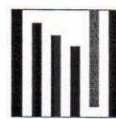


**Organizator:**



KURATORIUM OŚWIATY  
W OPOLU

**Patronat:**



INSTYTUT  
MATEMATYKI I INFORMATYKI  
UNIwersytetu OPOLSKIEGO

Zawody wojewódzkie (10 marca 2018 r.)

---

KLASA II

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych podany układ równań

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 19 \\ x^2 + y^2 + xy = 133 \end{cases}$$

2. W trójkącie prostokątnym  $ABC$ , w którym  $\angle ACB = 90^\circ$ , poprowadzono wysokość  $CD$ . Punkty  $O$ ,  $R$  i  $S$  są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty  $ABC$ ,  $ACD$  i  $BCD$ . Wykazać, że punkt  $O$  jest punktem przecięcia wysokości w trójkącie  $CRS$ .

3. Czy wielomian  $W(x) = x^4 + ax + b$  dla pewnych współczynników rzeczywistych  $a, b$  może mieć cztery różne pierwiastki?

4. W sześciokącie wypukłym wszystkie kąty mają jednakową miarę. Wykazać, że sumy długości boków wychodzących z przeciwległych wierzchołków tego sześciokąta są równe.

**Powodzenia!**

**Organizator:**



KURATORIUM OŚWIATY  
W OPOLU

**Patronat:**



INSTYTUT  
MATEMATYKI I INFORMATYKI  
UNIwersytetu OPOLSKIEGO

Zawody wojewódzkie (10 marca 2018 r.)

---

KLASA III

1. Dany jest ciąg liczb całkowitych  $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ , który spełnia warunek:

$$10 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10} \leq 150.$$

Udowodnić, że dla pewnych indeksów  $i < j$  zachodzi nierówność  $\frac{a_j}{a_i} \leq \frac{4}{3}$ .

2. Wyznaczyć dziedzinę funkcji  $f(x) = \log_x \left( \cos \frac{3\pi}{1+x^2} \right)$ .

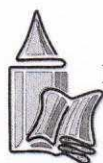
3. O kątach wewnętrznych  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  pewnego trójkąta ostrokątnego  $ABC$  wiadomo, że  $\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma = 1 : 2 : 3$ . Wyznaczyć  $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ .

**Uwaga.** Równość  $x : y : z = a : b : c$  oznacza, że istnieje taka liczba  $k \neq 0$ , że  $x = ka$ ,  $y = kb$  i  $z = kc$ .

4. Podstawą ostrosłupa  $ABCS$  jest trójkąt równoboczny  $ABC$ . Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa mają równe pola. Obliczyć objętość tego ostrosłupa wiedząc, krawędź  $SA$  ma długość 2, zaś krawędź  $SB$  ma długość  $\sqrt{2}$ .

**Powodzenia!**

**Organizator:**



KURATORIUM OŚWIATY  
W OPOLU

**Patronat:**



INSTYTUT  
MATEMATYKI I INFORMATYKI  
UNIwersytetu OPOLSKIEGO