L Mała Olimpiada Matematyczna – treści zadań

Zawody wojewódzkie (10 marca 2018 r.)

Klasa I

1. Dany jest zbiór dziesięciu liczb naturalnych $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$. Elementy tego zbioru spełniają warunek $10 \leqslant a < b < c < d < e < f < g < h < i < j \leqslant 150$. Wykazać, że dla pewnych dwóch liczb $x, y \in M$ takich, że $x < y$ zachodzi nierówność $\frac{y}{x} \leqslant \frac{4}{3}$.

2. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $\angle ACB = 90°$, poprowadzono wysokość CD. Liczby r, r_1 i r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ACD i BCD. Wykazać, że wtedy $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb pierwszych p i q, dla których suma $p^4 + q^4$ jest podzielna przez 50.

4. Promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ma długość 25 cm, zaś promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 12 cm. Obliczyć długości boków tego trójkąta.

Powodzenia!

Organizator:

Kuratorium Oświaty
w Opolu

Patronat:

Instytut
Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Opolskiego

Zawody wojewódzkie (10 marca 2018 r.)

KLASA II

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych podany układ równań

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 19 \\ x^2 + y^2 + xy = 133 \end{cases}.$$

2. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $\angle ACB = 90°$, poprowadzono wysokość CD. Punkty O, R i S są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABC, ACD i BCD. Wykazać, że punkt O jest punktem przecięcia wysokości w trójkącie CRS.

3. Czy wielomian $W(x) = x^4 + ax + b$ dla pewnych współczynników rzeczywistych a, b może mieć cztery różne pierwiastki?

4. W sześciokącie wypukłym wszystkie kąty mają jednakową miarę. Wykazać, że sumy długości boków wychodzących z przeciwległych wierzchołków tego sześciokąta są równe.

Powodzenia!

Łakotoła

Organizator:

KURATORIUM OŚWIATY
W OPOLU

Patronat:

INSTYTUT
MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU OPOLSKIEGO

Zawody wojewódzkie (10 marca 2018 r.)

KLASA III

1. Dany jest ciąg liczb całkowitych $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$, który spełnia warunek:

$$10 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{10} \leqslant 150.$$

Udowodnić, że dla pewnych indeksów $i < j$ zachodzi nierówność $\dfrac{a_j}{a_i} \leqslant \dfrac{4}{3}$.

2. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \log_x \left(\cos \dfrac{3\pi}{1+x^2}\right)$.

3. O kątach wewnętrznych α, β i γ pewnego trójkąta ostrokątnego ABC wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 1 : 2 : 3$. Wyznaczyć $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

Uwaga. Równość $x : y : z = a : b : c$ oznacza, że istnieje taka liczba $k \neq 0$, że $x = ka$, $y = kb$ i $z = kc$.

4. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC. Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa mają równe pola. Obliczyć objętość tego ostrosłupa wiedząc, krawędź SA ma długość 2, zaś krawędź SB ma długość $\sqrt{2}$.

Powodzenia!

Organizator:

KURATORIUM OŚWIATY
W OPOLU

Patronat:

INSTYTUT
MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU OPOLSKIEGO