Klasy po szkole podstawowej: 1 LO oraz klasa 1 Technikum

Zadanie 1.

Wiemy, że $\frac{b}{a} \in \left(-\frac{9}{10}, -\frac{8}{10}\right)$, $\frac{b}{c} \in \left(-\frac{9}{10}, -\frac{8}{10}\right)$. Udowodnij, że $\frac{c}{a} \in \left(\frac{8}{9}, \frac{9}{8}\right)$.

Rozwiązanie.

$-\frac{9}{10} < \frac{b}{a} < -\frac{8}{10} \Longrightarrow -9 < \frac{10b}{a} < -8 \Longrightarrow 8 < \frac{-10b}{a} < 9.$

Tak samo

$8 < \frac{-10b}{c} < 9 \Longrightarrow \frac{1}{9} < \frac{c}{-10b} < \frac{1}{8}.$

Zatem

$8 < \frac{-10b}{a} < 9$ i $\frac{1}{9} < \frac{c}{-10b} < \frac{1}{8} \Longrightarrow 8 \cdot \frac{1}{9} < \frac{-10b}{a} \cdot \frac{c}{-10b} < 9 \cdot \frac{1}{8} \Longrightarrow \frac{8}{9} < \frac{c}{a} < \frac{9}{8}.$

Zadanie 2.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność:

$$2x^2 + 5y^2 + 10 > 6xy + 4y.$$

Rozwiązanie.

Następujące nierówności są równoważne:

$2x^2 + 5y^2 + 10 > 6xy + 4y$

$4x^2 + 10y^2 + 20 > 12xy + 8y$

$4x^2 - 12xy + 9y^2 + y^2 - 8y + 16 + 4 > 0$

$(2x - 3y)^2 + (y - 4)^2 + 4 > 0$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo $a^2 \geq 0$, dla $a \in R$.

II sposób. (*Dla osób znających podstawowe własności trójmianu kwadratowego*.)

Potraktujmy nierówność $2x^2 + 5y^2 + 10 > 6xy + 4y$, jako nierówność o zmiennej x i parametrze y.

Po przekształceniu mamy nierówność kwadratową

$$2x^2 - 6yx + 5y^2 - 4y + 10 > 0.$$

Obliczmy wyróżnik tego trójmianu.

$\Delta = 36y^2 - 40y^2 + 32y - 80 = -4(y^2 - 8y + 20) = \underbrace{-4\,\underbrace{\left((y-4)^2 + 4\right)}_{>0}}_{<0}$

Ponieważ $\Delta < 0$, więc rozwiązaniem nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste.

Ponieważ parametr y był dowolny, więc dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y nierówność z zadania jest prawdziwa.

III sposób. (*Dla „koneserów”* $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$)

Następujące nierówności są równoważne:

$2x^2 + 5y^2 + 10 > 6xy + 4y$

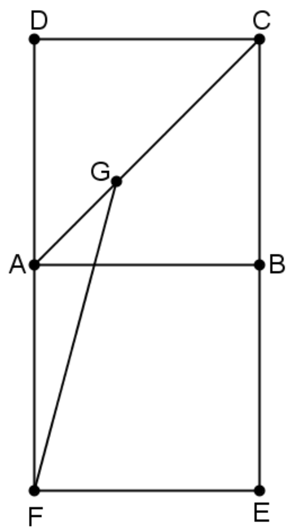
$2x^2 + 5y^2 - 6xy - 4y + 10 > 0$

$\underbrace{(y^2 + x^2 + 4 - 2xy + 4y - 4x)}_{(y-x+2)^2} + \underbrace{(x^2 + 4y^2 + 4 - 4xy + 4x - 8y)}_{(x-2y+2)^2} + 2 > 0$

$(y - x + 2)^2 + (x - 2y + 2)^2 + 2 > 0$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo $a^2 \geq 0$, dla $a \in R$.

Zadanie 3.

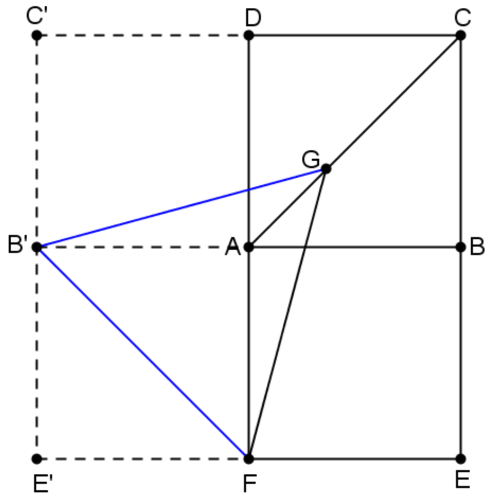


Kwadraty *ABCD* i *ABEF* mają wspólny bok (patrz rysunek).

Punkt *G* należy do przekątnej *AC* i $|FG| = |AC|$.
Wyznacz miarę kąta *AFG*.

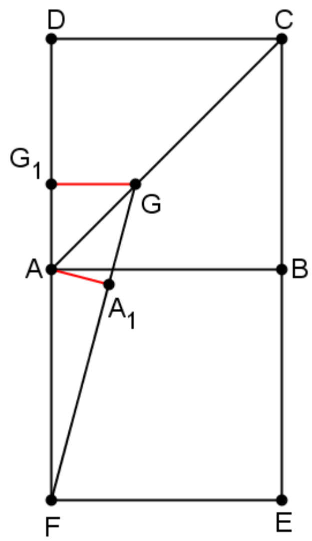
Rozwiązanie.

Kwadraty *AB'C'D* i *AB'E'D* są położone tak jak na rysunku.



Trójkąt *FGB'* jest równoboczny. Zatem $|\measuredangle AFG| = 60° - 45° = 15°$.

II sposób.



Niech $|AB| = a$, $|GG_1| = b$.

Wtedy $|AC| = |FG| = a\sqrt{2}$, $|AG| = b\sqrt{2}$.

Niech $GG_1 \perp AD$ i $AA_1 \perp FG$ (patrz rysunek).

Trójkąty prostokątne FGG_1 i FA_1A są podobne.

Zatem

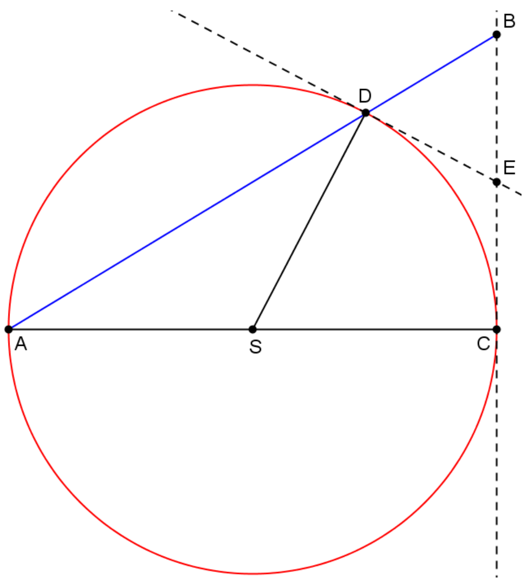
$$\frac{|AA_1|}{|AF|} = \frac{|GG_1|}{|FG|}$$

$$|AA_1| = |AF| \cdot \frac{|GG_1|}{|FG|} = a \cdot \frac{b}{a\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}|AG|$$

Z ostatniej równości wynika, że trójkąt AA_1G jest połową trójkąta równobocznego. Zatem $|\measuredangle GAA_1| = 60°$.

Stąd $|\measuredangle A_1AF| = 75°$ i $|\measuredangle AFA_1| = 15°$.

Zadanie 4.



Do okręgu o średnicy *AC* poprowadzono styczną *BC*. Odcinek *AB* przecina okrąg w punkcie *D*. Przez punkt *D* poprowadzono jeszcze jedną styczną do okręgu, która przecina *BC* w punkcie *E* (patrz rysunek).

Punkt *S* jest środkiem okręgu.

Udowodnij, że $|BE| = |EC|$.

Rozwiązanie.

Niech $|\sphericalangle CAB| = \alpha$.

Wtedy $|\sphericalangle CBA| = 90° - \alpha$.

Również $|\sphericalangle EDB| = 90° - \alpha$, bo $|\sphericalangle EDB| = 180° - |\sphericalangle EDS| - |\sphericalangle SDA| = 180° - 90° - \alpha$.

Zatem $|BE| = |ED|$.

Trójkąty prostokątne *CSE* i *DSE* są przystające, (dlaczego?).

Zatem $|ED| = |EC|$.

Stąd teza.

Uwaga.

Równość $|ED| = |EC|$ można wywnioskować powołując się na twierdzenie o odcinkach stycznych.