Klasy 1 LO oraz klasy 1 i 2 Technikum

Zadanie 1.

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x, y, które spełniają równanie $4x^2 - y^2 = 36$.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że liczba y musi być parzysta.

Ponieważ

$$36 = 4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$$

więc

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} 2x - y = 18 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 2x + y = -18 \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} 2x - y = -6 \\ 2x + y = -6 \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} 2x - y = -18 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = 5 \\ y = -8 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = -5 \\ y = -8 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = -5 \\ y = 8 \end{cases}$$

Zadanie 2.

Dla pewnych liczb rzeczywistych $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0$ zachodzi równość $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$.
Udowodnij, że $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ab}$.
Rozwiązanie.

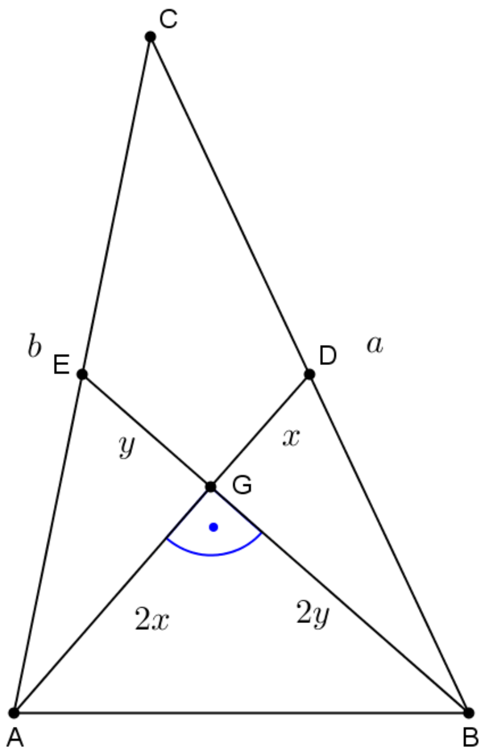
$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{ab}$$

Zadanie 3.

W trójkącie *ABC* środkowe *AD* i *BE* są prostopadłe.
Wyznacz długość boku *AB* wiedząc, że $|AC| = b$ i $|BC| = a$.

Rozwiązanie.

Oznaczenia takie jak na rysunku.



$$\frac{a^2}{4} = x^2 + 4y^2$$

$$\frac{b^2}{4} = y^2 + 4x^2$$

Stąd

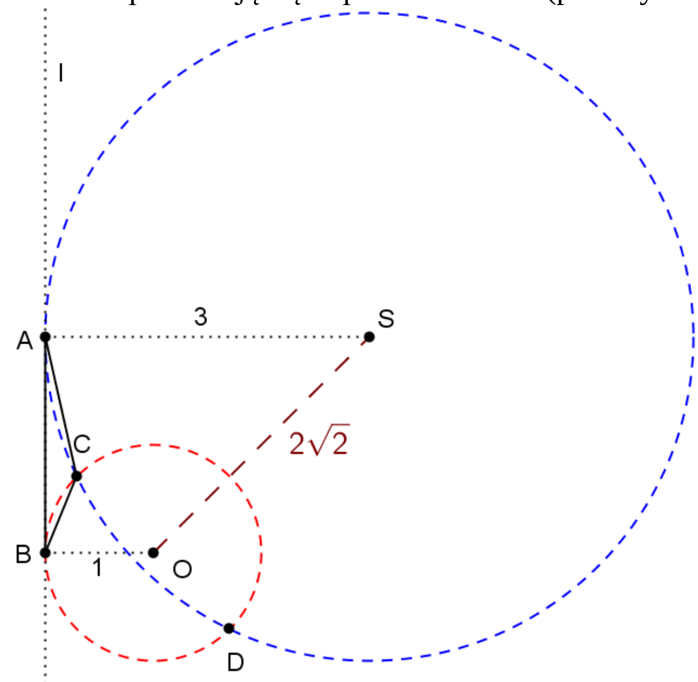
$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = 5x^2 + 5y^2$$

$$|AB|^2 = 4x^2 + 4y^2 = \frac{a^2 + b^2}{5}$$

$$|AB| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}.$$

Zadanie 4.

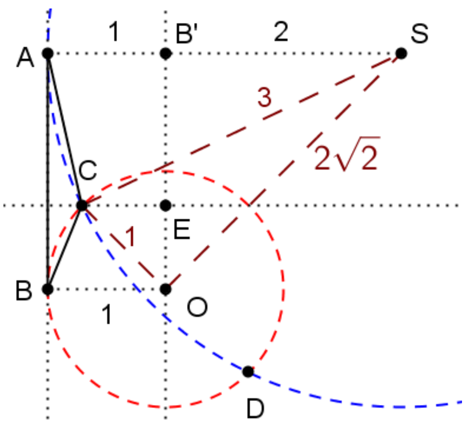
Okrąg o środku S i promieniu 3 oraz okrąg o środku O i promieniu 1 są styczne do prostej l w punktach odpowiednio A i B oraz przecinają się w punktach C i D (patrz rysunek).



Wiedząc, że $|OS| = 2\sqrt{2}$ obliczyć pole trójkąta ABC.

Rozwiązanie.

Oznaczenia tak jak na rysunku.



Wykorzystując twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa zauważamy, że trójkąt COS jest prostokątny, $|\measuredangle COS| = 90°$.

Natomiast z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $|OB'| = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - (3-1)^2} = 2$.

Czyli trójkąt $B'OS$ jest trójkątem prostokątnym równoramiennym.

Zatem $|\measuredangle B'OS| = 45°$. Stąd $|\measuredangle COE| = 45°$.

Czyli trójkąt prostokątny COE jest równoramienny o przyprostokątnych długości $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zatem wysokość trójkąta ABC jest równa $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zauważmy jeszcze, że $|AB| = |OB'| = 2$.

Pole trójkąta ABC wynosi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$