Klasy 1 LO oraz klasy 1 i 2 Technikum

Zadanie 1.

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x, y, które spełniają równanie $6xy + 3x - 2y = 16$.

Rozwiązanie.

Równania są równoważne

$6xy + 3x - 2y = 16$

$3x(2y + 1) - 2y = 16$

$3x(2y + 1) - (2y + 1) = 15$

$(3x - 1)(2y + 1) = 15.$

Stąd

$\begin{cases} 3x - 1 = 1 \\ 2y + 1 = 15 \end{cases}$

lub

$\begin{cases} 3x - 1 = 3 \\ 2y + 1 = 5 \end{cases}$

lub

$\begin{cases} 3x - 1 = 5 \\ 2y + 1 = 3 \end{cases}$

lub

$\begin{cases} 3x - 1 = 15 \\ 2y + 1 = 1 \end{cases}$

lub

$\begin{cases} 3x - 1 = -1 \\ 2y + 1 = -15 \end{cases}$

lub

$\begin{cases} 3x - 1 = -3 \\ 2y + 1 = -5 \end{cases}$

lub

$\begin{cases} 3x - 1 = -5 \\ 2y + 1 = -3 \end{cases}$

lub

$\begin{cases} 3x - 1 = -15 \\ 2y + 1 = -1 \end{cases}$

Odpowiedź.

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 0 \\ y = -8 \end{cases}$

Zadanie 2.

Dla pewnych liczb rzeczywistych $a, b, c \neq 0$ zachodzi równość $a^2 - b^2 = bc$ i $b^2 - c^2 = ca$. Udowodnij, że $a^2 - c^2 = ab$.

Rozwiązanie.

Z pierwszej równości wyznaczamy c

$$c = \frac{a^2 - b^2}{b}$$

Dodając stronami równości $a^2 - b^2 = bc$ i $b^2 - c^2 = ca$ otrzymujemy:

$$a^2 - c^2 = bc + ca = c(a + b) = \frac{a^2-b^2}{b} \cdot (a + b) \qquad (1)$$

Podstawiamy do drugiej równości i otrzymujemy

$$b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{b}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{b} a$$

$$\frac{b^4 - (a^2 - b^2)^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{b} a$$

$$\frac{(b^2 - a^2 + b^2)(b^2 + a^2 - b^2)}{b} = (a^2 - b^2)a$$

$$\frac{(b^2 + b^2 - a^2)a^2}{b} = (a^2 - b^2)a$$

$$(b^2 + b^2 - a^2)a = (a^2 - b^2)b$$

$$ab^2 + (b^2 - a^2)a = (a^2 - b^2)b$$

$$ab^2 = (a^2 - b^2)b + (a^2 - b^2)a$$

$$ab^2 = (a^2 - b^2)(a + b)$$

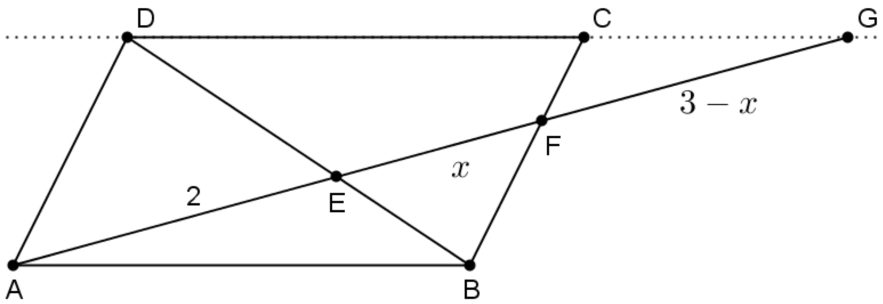
Podstawiając do (1) otrzymujemy

$$a^2 - c^2 = \frac{ab^2}{b} = ab$$

Zadanie 3.

Przez wierzchołek A równoległoboku $ABCD$ poprowadzona jest prosta, która przecina przekątną BD w punkcie E, bok BC przecina w punkcie F oraz prostą CD w punkcie G.
Wyznacz długość odcinka EF wiedząc, że $|AE| = 2$ i $|EG| = 3$.

Rozwiązanie.



Niech $|EF| = x$.

Trójkąty ABE i DGE są podobne.

Stąd

$$\frac{|DG|}{|AB|} = \frac{|EG|}{|AE|} = \frac{3}{2}$$

$$|DG| = \frac{3}{2}|AB|.$$

Zatem

$$|CG| = \frac{1}{2}|AB|.$$

Trójkąty ABF i CGE są podobne.

Stąd

$$\frac{|AB|}{|CG|} = \frac{2+x}{3-x}.$$

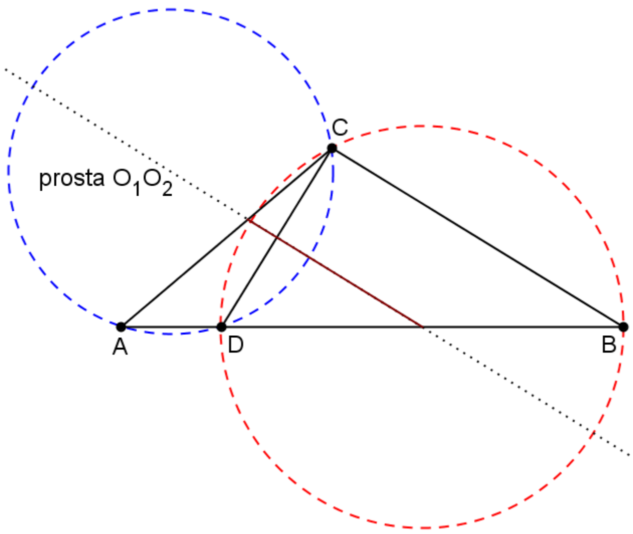
Zatem

$$2 = \frac{2+x}{3-x}$$

$$6 - 2x = 2 + x$$

$$x = \frac{4}{3}.$$

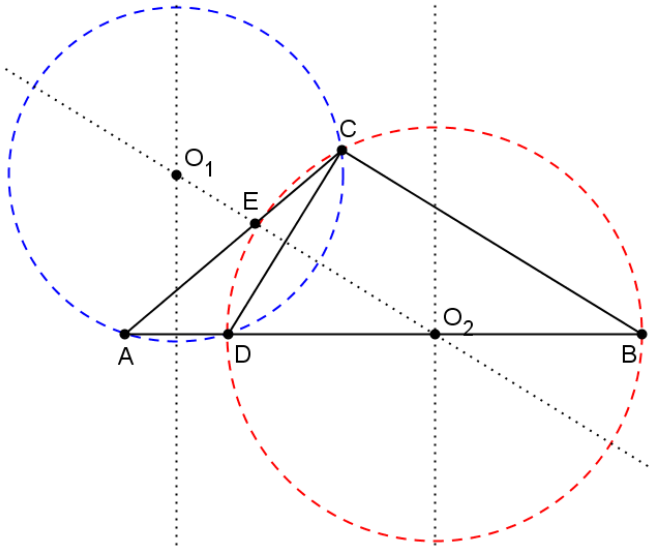
Zadanie 4.
W trójkącie *ABC* punkt *D* leży na boku *AB* i $|BD| = 4|AD|$.
Punkty O_1 i O_2 są środkami okręgów opisanych na trójkątach odpowiednio *ACD* i *BCD*.
Wiadomo, że prosta O_1O_2 jest równoległa do prostej *BC* (patrz rysunek).
W jakim stosunku prosta O_1O_2 dzieli pole trójkąta *ABC*?



Rozwiązanie.
Punkt O_1, O_2 należą do symetralnej *DC*, czyli $O_1O_2 \perp DC$, a ponieważ $O_1O_2 \parallel BC$, więc $DC \perp BC$.
Zatem trójkąt *BCD* jest prostokątny, czyli O_2 jest środkiem przeciwprostokątnej *BD*.

Uwaga. Można też ten wniosek otrzymać powołując się na twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

[Punkty O_1, O_2 należą do symetralnej DC a, ponieważ jest ona równoległa do BC, więc przecina odcinek BD w środku. Zatem O_2 należy do boku BD.]



Niech prosta O_1O_2 przecina *AC* w punkcie *E*.

Trójkąty AEO_2 i *ABC* są podobne.

Skala podobieństwa $s = \frac{3}{5}$.

Zatem

$$P_{AEO_2} = \frac{9}{25} P_{ABC} = \frac{9}{25} P_{AEO_2} + \frac{9}{25} P_{BCEO_2}\ .$$

Stąd

$$\frac{16}{25} P_{AEO_2} = \frac{9}{25} P_{BCEO_2}$$

$$\frac{P_{AEO_2}}{P_{BCEO_2}} = \frac{9}{16}$$