



Klasy 2 LO oraz klasa 3 Technikum

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in R$, dla którego równanie

$$(|x - 2a| - 3)(|x - 3| - 2a) = 0$$

ma dokładnie dwa różne rozwiązania.

Rozwiązanie.

Równanie jest równoważne alternatywie równań

$$|x - 2a| = 3 \text{ lub } |x - 3| = 2a$$

Pierwsze równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1 = 3 + 2a, x_2 = -3 + 2a.$$

Zauważmy, że $x_1 \neq x_2$.

Dla $a < 0$ drugie równanie nie ma rozwiązań.

Dla $a = 0$ drugie równanie ma jedno rozwiązanie:

$$x_3 = 3.$$

Zauważamy, że $x_3 = 3 = x_1$.

Dla $a > 0$ drugie równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_3 = 3 + 2a, x_4 = 3 - 2a.$$

Zauważamy, że $x_3 = x_1$ oraz $x_3 \neq x_4$.

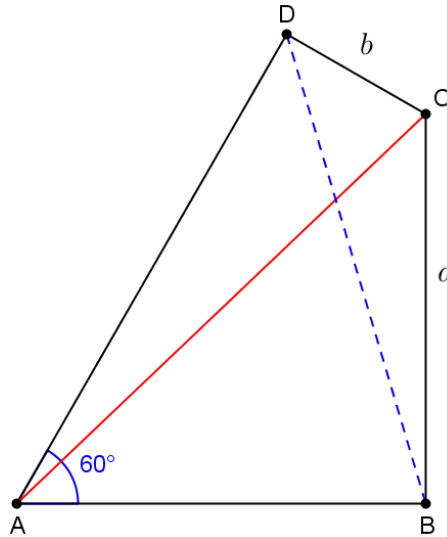
$$x_4 = x_2 \Leftrightarrow 3 - 2a = -3 + 2a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Odp. $a \in (-\infty; 0) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Zadanie 2.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ boki AB i BC oraz AD i DC są prostopadłe.
Wyznacz długość przekątnej AC wiedząc, że $|CB| = a$ i $|CD| = b$ oraz $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$.

Rozwiązanie.



Przekątna AC jest średnicą okręgu opisanym na czworokącie $ABCD$.

Z twierdzenia sinusów

$$\frac{|BD|}{\sin 60^\circ} = 2R = |AC|.$$

Z twierdzenia cosinusów

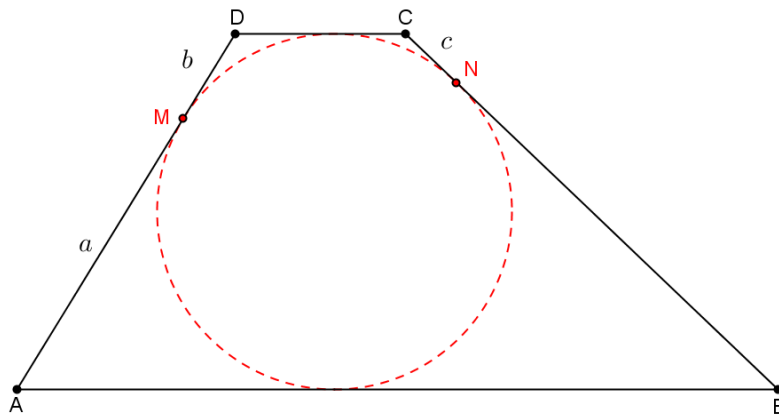
$$|BD|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab.$$

Zatem

$$|AC| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}}.$$

Zadanie 3.

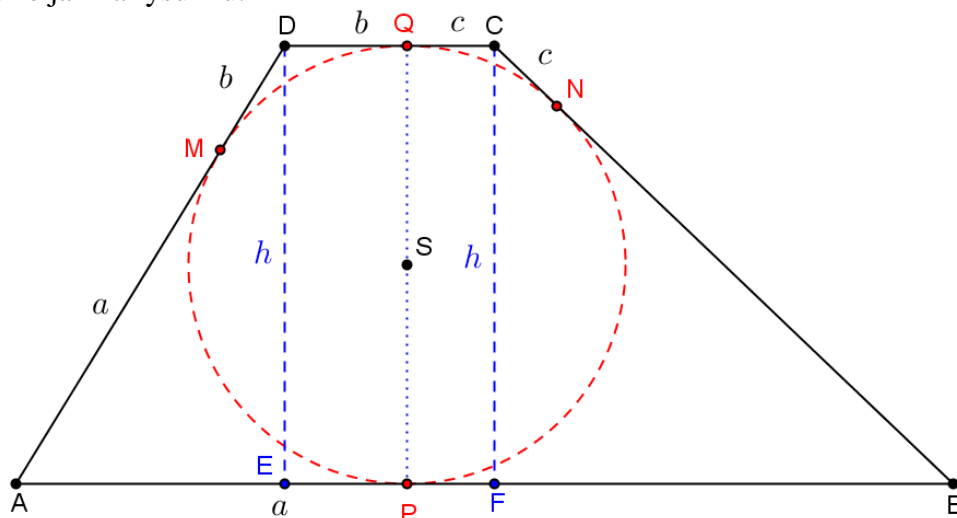
Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) jest opisany na okręgu. Okrąg ten jest styczny z ramieniem AD w punkcie M , a z ramieniem BC w punkcie N (patrz rysunek).



Wyznaczyć pole trapezu $ABCD$ wiedząc, że $|AM| = a$, $|MD| = b$, $|CN| = c$.

Rozwiązanie.

Oznaczenia takie jak na rysunku.



Twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADE .

$$h^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab, \quad h = 2\sqrt{ab}.$$

Niech $|BP| = |BN| = d$.

Wtedy

$$(2\sqrt{ab})^2 + (d - c)^2 = (d + c)^2$$

$$4ab = 4dc, \quad d = \frac{ab}{c}.$$

Pole trapezu

$$P = \frac{a+d+b+c}{2} \cdot h = \left(a + b + c + \frac{ab}{c}\right) \sqrt{ab}.$$

$$\text{Odp. } P = \left(a + b + c + \frac{ab}{c}\right) \sqrt{ab}.$$

Zadanie 4.

Rozwiąż równanie

$$(x^2 - 4x)^2 + 2(x - 2)^2 = 43.$$

Rozwiązanie.

$$(x^2 - 4x + 4 - 4)^2 + 2(x - 2)^2 = 43$$

$$((x - 2)^2 - 4)^2 + 2(x - 2)^2 = 43$$

$$t = (x - 2)^2, t \geq 0$$

$$(t - 4)^2 + 2t = 43$$

$$t^2 - 6t - 27 = 0$$

$$\Delta = 36 + 4 \cdot 27 = 9 \cdot 16$$

$$t_1 = \frac{6 - 12}{2} = -3 < 0 \text{ lub } t_2 = \frac{6 + 12}{2} = 9$$

$$(x - 2)^2 = 9$$

$$x - 2 = 3 \text{ lub } x - 2 = -3$$

$$x_1 = 5 \text{ lub } x_2 = -1$$

Odp. $x \in \{-1, 5\}$.