Klasy 2 LO oraz klasa 3 Technikum

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in R$, dla którego równanie

$$(|x-a|-2)(ax^2-4ax-3x+12)=0$$

ma dokładnie trzy różne rozwiązania.

Rozwiązanie.

Równanie jest równoważne alternatywie równań

$|x-a|=2$ lub $(x-4)(ax-3)=0$.

Pierwsze równanie ma dwa rozwiązania

$x_1=2+a$, $x_2=-2+a$.

Zauważmy, że $x_1 \neq x_2$.

Dla $a=0$ drugie równanie ma jedno rozwiązanie:

$x_3=4$.

Zauważamy, że $x_3=3, x_1=2, x_2=-2$.

Dla $a \neq 0$ drugie równanie ma dwa rozwiązania:

$x_3=4$, $x_4=\frac{3}{a}$.

$x_1=x_3 \Leftrightarrow 2+a=4 \Leftrightarrow a=2$. Wtedy $x_1=x_3=4$, $x_2=0$, $x_4=\frac{3}{2}$.

$x_2=x_3 \Leftrightarrow -2+a=4 \Leftrightarrow a=6$. Wtedy $x_2=x_3=4$, $x_1=8$, $x_4=\frac{1}{2}$.

$x_3=x_4 \Leftrightarrow 4=\frac{3}{a} \Leftrightarrow a=\frac{3}{4}$. Wtedy $x_1=\frac{11}{4}$, $x_2=-\frac{5}{4}$, $x_3=x_4=4$.

$x_1=x_4 \Leftrightarrow 2+a=\frac{3}{a} \Leftrightarrow a^2+2a-3=0 \Leftrightarrow a=1$ lub $a=-3$.

Wtedy $(a=1)$ $x_1=x_4=3$, $x_2=-1$, $x_3=4$ lub $(a=-3)$ $x_1=x_4=-1$, $x_2=-5$, $x_3=4$.

$x_2=x_4 \Leftrightarrow -2+a=\frac{3}{a} \Leftrightarrow a^2-2a-3=0 \Leftrightarrow a=-1$ lub $a=3$.

Wtedy $(a=-1)$ $x_2=x_4=-3$, $x_1=1$, $x_3=4$ lub $(a=3)$ $x_2=x_4=1$, $x_1=5$, $x_3=4$

Odp. $a \in \left\{0, 2, 6, \frac{3}{4}, 1, -3, -1, 3\right\}$.

Zadanie 2.

Trójkąt *ABC* przecięto prostą *DE* równoległą do podstawy *AB*. Punkt *D* należy do boku *BC*, natomiast *E* do boku *AC*. Otrzymano trapez *ABDE*, którego przekątne *AD* i *BE* są prostopadłe.
Wiedząc, że $|\measuredangle ACB| = \alpha$ i $|AB| = a$ oraz $|DE| = b$ udowodnij, że pole trapezu *ABDE* wynosi

$$P_{ABDE} = \frac{(a+b)ab}{2(a-b)}\operatorname{tg}\alpha.$$

Rozwiązanie.

Oznaczenia takie jak na rysunku, $DG \parallel AC$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *BDG* otrzymujemy:

$$(a-b)^2 = |DG|^2 + |DB|^2 - 2|DG||DB|\cos\alpha$$

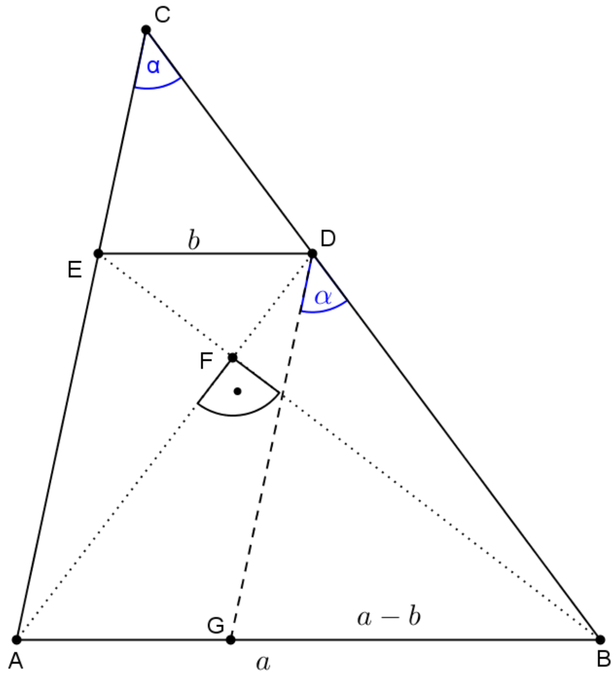
$$(a-b)^2 = |EF|^2 + |FA|^2 + |DF|^2 + |FB|^2 - 2|DG||DB|\cos\alpha$$

$$(a-b)^2 = \underbrace{|FA|^2 + |FB|^2}_{a^2} + \underbrace{|EF|^2 + |DF|^2}_{b^2} - 2|DG||DB|\cos\alpha$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2|DG||DB|\cos\alpha$$

$$|DG||DB| = \frac{ab}{\cos\alpha}$$

$$P_{BDG} = \frac{1}{2}|DG||DB|\sin\alpha = \frac{1}{2}ab\operatorname{tg}\alpha.$$



Trójkąty *ABC* i *BDG* są pdobne.

Skala podobieństwa wynosi $\frac{a}{a-b}$.

Zatem

$$P_{ABC} = \left(\frac{a}{a-b}\right)^2 P_{BDG} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a-b}\right)^2 ab\operatorname{tg}\alpha.$$

Trójkąty *CDE* i *BDG* są pdobne.

Skala podobieństwa wynosi $\frac{b}{a-b}$.

Zatem

$$P_{CDE} = \left(\frac{b}{a-b}\right)^2 P_{BDG} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a-b}\right)^2 ab\operatorname{tg}\alpha.$$

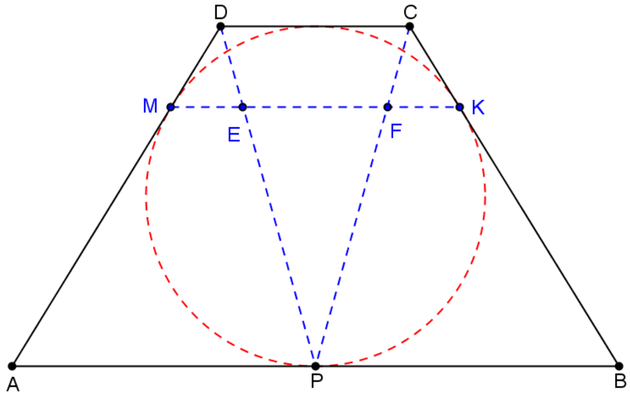
Stąd

$$P_{ABDE} = P_{ABC} - P_{CDE} = \frac{1}{2}ab\operatorname{tg}\alpha\left(\left(\frac{a}{a-b}\right)^2 - \left(\frac{b}{a-b}\right)^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}ab\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b}\right)\left(\left(\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a-b}\right)\right) = \frac{(a+b)ab}{2(a-b)}\operatorname{tg}\alpha.$$

Zadanie 3.

Równoramienny trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) jest opisany na okręgu.



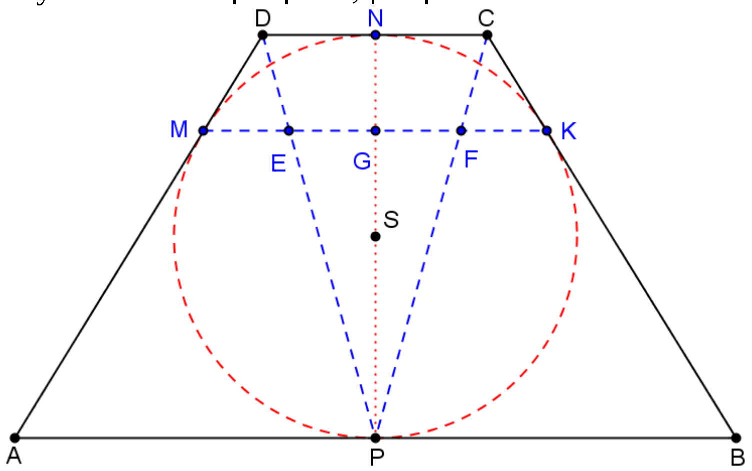
Okrąg ten jest styczny z podstawą AB w punkcie P, a z ramionami AD i BC w punktach odpowiednio M i K.

Proste PD i PC przecinają odcinek MK w punktach odpowiednio E i F (patrz rysunek).

Oblicz długość odcinka EF wiedząc, że $|MK| = m$.

Rozwiązanie.

Oznaczenia takie jak na rysunku. Niech $|BP| = a$, $|CN| = b$.



Wtedy $|BK| = a$ i $|CK| = b$.

Trójkąty CKF i BCP są podobne, więc

$\frac{|FK|}{|BP|} = \frac{|CK|}{|CB|}$, $\frac{|FK|}{a} = \frac{b}{a+b}$, $\qquad |FK| = \frac{ab}{a+b}$.

Dalej

$\frac{|CF|}{|CP|} = \frac{|CK|}{|CB|}$, $\frac{|CF|}{|CP|} = \frac{b}{a+b}$.

Trójkąty CNP i FGP są podobne, więc

$\frac{|GF|}{|CN|} = \frac{|PF|}{|CP|}$, $\frac{|GF|}{b} = \frac{|CP|-|CF|}{|CP|} = 1 - \frac{|CF|}{|CP|} = 1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}$, $\qquad |GF| = \frac{ab}{a+b}$.

Zatem

$|FK| = |FG|$.

Trapez jest równoramienny, więc

$|ME| = |EG|$.

Czyli $|EF| = \frac{1}{2}|MK| = \frac{m}{2}$.

Odp. $|EF| = \frac{m}{2}$.

Zadanie 4.

Rozwiąż równanie

$$\frac{x^5}{(x-2)^2}+\frac{(x-2)^2}{x}=2x^2.$$

Rozwiązanie.

$0\neq x\neq 2.$

$$\frac{x^5}{(x-2)^2}+\frac{(x-2)^2}{x}=2x^2 \Leftrightarrow \frac{x^4}{(x-2)^2}-2x+\frac{(x-2)^2}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-2}-\frac{x-2}{x}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{x-2}-\frac{x-2}{x}=0 \Leftrightarrow x^3-(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x^3-x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4)=0$$

Odp. $x=1$.

II sposób.

$0\neq x\neq 2.$

$$\frac{x^5}{(x-2)^2}+\frac{(x-2)^2}{x}=2x^2 \Leftrightarrow \frac{x^3}{(x-2)^2}+\frac{(x-2)^2}{x^3}=2$$

Niech

$$\frac{x^3}{(x-2)^2}=t$$

Wtedy

$$t+\frac{1}{t}=2 \Leftrightarrow t=1$$

$$\frac{x^3}{(x-2)^2}=1 \Leftrightarrow x^3-x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow (x^2+4)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$$

III sposób.

$0\neq x\neq 2.$

$$\frac{x^5}{(x-2)^2}+\frac{(x-2)^2}{x}=2x^2 \Leftrightarrow x^6+(x-2)^4=2x^3(x-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^6-2x^3(x-2)^2+(x-2)^4=0 \Leftrightarrow (x^3-(x-2)^2)^2=0 \Leftrightarrow x^3-(x-2)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$x^3-x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow x=1$$