Klasy 3 LO oraz klasa 4 Technikum

Zadanie 1.

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 + x^2 + |x-1|$, $x \in R$.
Rozwiązanie.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x - 1, \text{dla } x \geq 1 \\ x^3 + x^2 - x + 1, \text{dla } x < 1 \end{cases}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1, \text{dla } x > 1 \\ 3x^2 + 2x - 1, \text{dla } x < 1 \end{cases}.$$

Dla $x \in (1, +\infty)$.
Pochodna w tym przedziale jest dodatnia, $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$.
Dla $x \in (-\infty, 1)$.

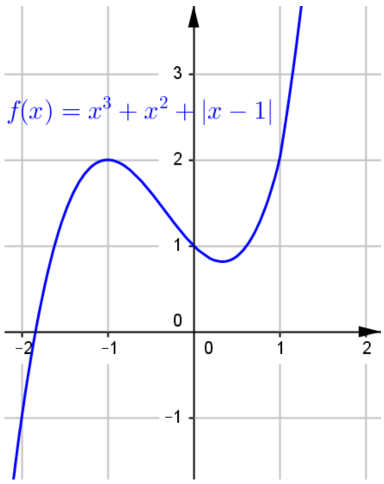
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

Funkcja f jest ciągła w R.

Zatem jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, -1\rangle$, $\left\langle\frac{1}{3}, +\infty\right)$ oraz malejąca w przedziale $\left\langle -1, \frac{1}{3}\right\rangle$.

Wykres funkcji:



Zadanie 2.

Rozwiąż równanie $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$.
Rozwiązanie.

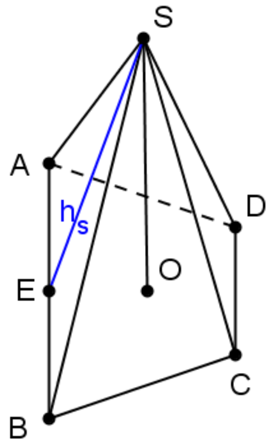
$\cos 7x + \cos x - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$
$2\cos 4x \cos 3x - \cos 4x = 0$
$\cos 4x\,(2\cos 3x - 1) = 0$
$\cos 4x = 0$ lub $\cos 3x = \dfrac{1}{2}$
$4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $3x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$
Odp. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ lub $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$, $k \in C$.

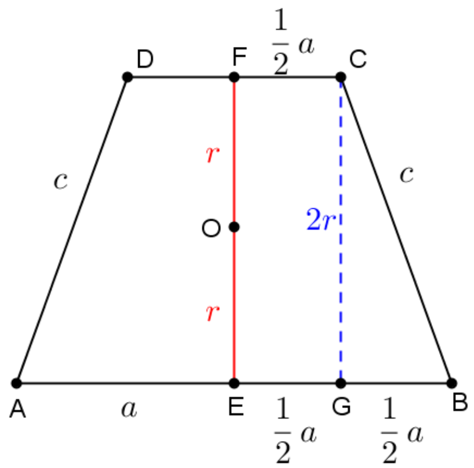
Zadanie 3.

Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest trapez równoramienny $ABCD$ $(AB \parallel CD, |AB| = 2a, |CD| = a)$. Ściany boczne tego ostrosłupa są nachylone do podstawy pod takim samym kątem. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wiedząc, że wysokość ostrosłupa wynosi a.

Rozwiązanie.

Ponieważ ściany boczne są nachylone do podstawy pod takim samym kątem, więc spodek wysokości jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$.





Wykorzystując twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu otrzymujemy: $3a = 2c$, skąd $c = \frac{3}{2}a$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BCG* otrzymujemy:

$$2r = \sqrt{c^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a, \qquad r = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Wysokość ścian bocznych

$${h_s}^2 = a^2 + r^2 = a^2 + \frac{2}{4}a^2 = \frac{6}{4}a^2,\ h_s = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

Pole powierzchni bocznej

$$P = \frac{1}{2}(2a + 2c + a)h_s = \frac{3\sqrt{6}}{2}a^2.$$

Uwaga.

Można też wykorzystać inne twierdzenie o trapezie opisanym na okręgu: $|\measuredangle COB| = 90°$.

Wtedy wystarczy twierdzenie Pitagorasa.

Trójkąt *BOE*: $|OB|^2 = a^2 + r^2$

Trójkąt *CFO*: $|OC|^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2$

Trójkąt *BCO*:

$$c^2 = |OB|^2 + |OC|^2 = a^2 + r^2 + \frac{1}{4}a^2 + r^2 = \frac{5}{4}a^2 + 2r^2$$

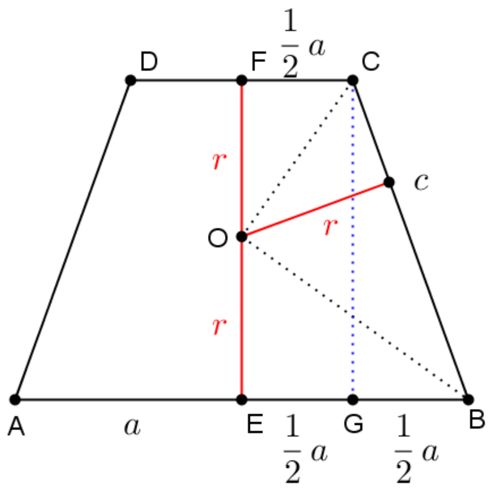
Trójkąt *BCG*: $c^2 = \frac{1}{4}a^2 + 4r^2$

Zatem

$$\frac{1}{4}a^2 + 4r^2 = \frac{5}{4}a^2 + 2r^2$$

$$2r^2 = a^2$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}a,\ c = \frac{3}{2}a.$$



Zadanie 4.

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 9, natomiast suma kwadratów tych wyrazów jest równa $\frac{81}{2}$. Wyznacz pierwszy wyraz oraz iloraz tego ciągu.

Rozwiązanie.

Wykorzystując wzór na sumę nieskończoną ciągu geometrycznego otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} = 9 \\ \dfrac{{a_1}^2}{1-q^2} = \dfrac{81}{2} \end{cases}$$

$$\frac{81}{2} = \frac{81(1-q)^2}{1-q^2} = \frac{81(1-q)^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{81(1-q)}{(1+q)}$$

$$1+q = 2(1-q)$$

Odp. $q = \frac{1}{3}$, $a_1 = 6$.