Klasy 3 LO oraz klasa 4 Technikum

Zadanie 1.

Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 4x^3 - x|x-2|$ w przedziale $\langle -3; 3\rangle$.

Rozwiązanie.

$$f(x) = 4x^3 - x|x-2| = \begin{cases} 4x^3 + x^2 - 2x, \text{dla } x \in (-\infty;\ 2) \\ 4x^3 - x^2 + 2x, \text{dla } x \in \langle 2;\ +\infty) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 12x^2 + 2x - 2, \text{dla } x \in (-\infty;\ 2) \\ 12x^2 - 2x + 2, \text{dla } x \in (2;\ +\infty) \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ lub } x = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right) \cup (2;\ +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$$

Funkcja f jest funkcją ciągłą.

Zatem w przedziałach $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left\langle\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ jest funkcją rosnącą, natomiast w przedziale $\left\langle -\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right\rangle$ jest funkcją malejącą.

x	-3	$\left(-3; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3};\ 3\right)$	3
$f(x)$	-93	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{11}{27}$	$\nearrow$	105

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{4+3-18}{27} = -\frac{11}{27}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{-2+1+4}{4} = \frac{3}{4}$

$f(3) = 108 - 9 + 6 = 105$ jest wartością największą.

$f(-3) = -108 + 9 + 6 = -93$ jest wartością najmniejszą.

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$.

Rozwiązanie.

Następujące równania są równoważne:

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$$

$$4\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x - 2\sin 2x \cdot \cos 2x = 0$$

$$\sin 2x\,(2\sin x \cdot \sin 3x - \cos 2x) = 0$$

$$\sin 2x\,(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0$$

$$\sin 2x \cdot \cos 4x = 0$$

$$\sin 2x = 0 \text{ lub } \cos 4x = 0$$

$$2x = k\pi \textit{ lub } 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

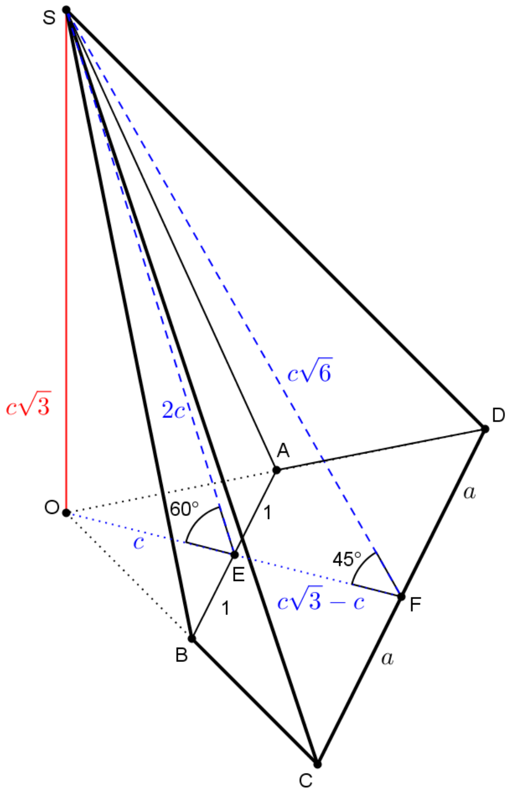
Odp. $x = \frac{k\pi}{2}$ lub $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in C$.

Zadanie 3.

Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest trapez równoramienny $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Ściany *ABS* i *CDS* są nachylone do podstawy pod kątami odpowiednio $60°$ i $45°$, natomiast ściany *BCS* i *ADS* są prostopadłe do podstawy. Oblicz pole powierzchni tego ostrosłupa wiedząc, że $|AB| = 2$ i pole trapezu *ABCD* też jest równe 2.

Rozwiązanie.

Oznaczenia takie jak na rysunku.



Trójkąty *ABO* i *CDO* są równoramienne. Punkty *E*, *F* są środkami podstaw trapezu *AB* i *CD*. Niech $|EO| = c$, $|CF| = a$. Wtedy $|ES| = 2c$, $|SO| = c\sqrt{3}$, $|FO| = c\sqrt{3}$, $|FS| = c\sqrt{6}$.

Trójkąty *BEO* i *CFO* są podobne, więc $\frac{c}{1} = \frac{c\sqrt{3}}{a}$. Zatem $a = \sqrt{3}$.

Pole trapezu *ABCD*: $2 = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)c = 2c$, więc $c = 1$.

Stąd $|BO| = \sqrt{2}$, $|CO| = \sqrt{6}$, $|BC| = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Pole powierzchni ostrosłupa:

$P_{CDS} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$

$P_{ABS} = 1 \cdot 2 = 2$

$P_{BCS} = P_{BDS} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}$

$P_C = 2 + 3\sqrt{2} + 2 + 3\sqrt{2} - \sqrt{6} = 4 + 6\sqrt{2} - \sqrt{6}.$

Zadanie 4.

W trójkącie *ABC* miary kątów $\alpha = |\measuredangle BAC| < \beta = |\measuredangle ABC| < \gamma = |\measuredangle ACB|$ tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 2. Uzasadnij, że $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, gdzie $a = |BC|, b = |AC|, c = |AB|$.

Rozwiązanie.

$\beta = 2\alpha, \gamma = 4\alpha.$

$a = 2R\sin\alpha,\ b = 2R\sin 2\alpha,\ c = 2R\sin 4\alpha.$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2R\sin 2\alpha} + \frac{1}{2R\sin 4\alpha} = \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha}\right) = \frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 4\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2R}\cdot\frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha\sin 4\alpha} = \frac{1}{2R}\cdot\frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha\sin 4\alpha} = \frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha\sin 4\alpha} = \frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin(180^\circ - 4\alpha)}{\sin\alpha\sin 4\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha\sin 4\alpha} = \frac{1}{2R\sin\alpha} = \frac{1}{a}$$